基于语义信息论的确证方法
——以乌鸦悖论和医学检验为例

鲁晨光

摘要：确证度计算是现代归纳逻辑的核心议题。语义信息研究表明， 对于不太可靠的预测或假设，适度信任可以提高平均语义信息。求一系列证据提供的平均信息时，改变不信度 *b'*（即反例的真值），使平均语义信息达最大的不信度就是否证度 *b'**，*b**=1- *b'**就是确证度。对于全称假设，确证度 *b**=1-反例变小率/正例增大率。这表明，要确证一个假设，反例少比正例多更重要。按数理逻辑，“所有乌鸦是黑的”和“所有不黑的就不是乌鸦”等价；支持后者的证据（比如白粉笔）也支持前者。这违背常识，所以存在悖论。考虑医学检验，上述等价关系和常识都是错的。医学界用阳性似然比（LR+=敏感性/(1-特异性)）表示阳性有多可靠。幸好 *b**=1-(1-特异性)/敏感性=1-1/LR+，因而和医学界共识兼容。

关键词：归纳逻辑；语义信息；确证；乌鸦悖论；医学检验

中图分类号：B814　文献标识码：A

一、引 言

归纳逻辑的研究随着时代变迁，其重心已经转向确证度（Degree of Confirmation）研究。亨佩尔（Hempel）提出的乌鸦悖论也叫确证悖论[1]，它是帮助我们从理论上看一种确证度是否合理的很好例子。医学检验则是帮助我们从实用的角度看一种确证度是否合理的很好例子。

我们用大写 E 表示个体或证据变量；小写 e_i 表示第 i 个个体(i 也可能是 11, 01 等)，s_k 示第 k 个假设或谓词, h_j 表示第 j 个假设或谓词(复合谓词)。令 $s_1=s_1(E)$=“E 是乌鸦”，$s_2=s_2(E)$=“E 是黑的”，$h_1=s_1\text{->}s_2=s_1(E)\text{->}s_2(E)$=“所有乌鸦是黑的”。所有证据分为 4 种（参看表 1）。e_{11} 使左边和上面的假设 s_1 和 s_2 为真， 其他类推。

表 1 全称假设 $h_1=s_1\text{->}s_2$ 的证据分为四种

E	s_2	$\neg s_2$
s_1	e_{11}	e_{10}
$\neg s_1$	e_{01}	e_{00}

按尼科德标准[①]：关于推理 h_1, e_{11} 是正例， e_{10} 是反例，e_{01} 和 e_{00} 同 h_1 不相关（后面称之为**不相关说**，简称 **IR**）。关于 $h_2=\neg s_2\text{->}\neg s_1$，$e_{00}$ 是正例, e_{10} 同样是反例，e_{11} 和 e_{01} 和 h_2 不相关。

按数理逻辑，存在**等价条件**（后面简称 **EC**）：$h_1=h_2$。这是因为两者反例相同。

[①] 见 https://en.wikipedia.org/wiki/Raven_paradox

根据 **IR** 说，e_{00} 和推理 h_1 不相关； 但是根据 **EC**，e_{00} 支持 h_2 因而也支持 h_1。所以存在悖论。用一个通俗的例子说就是：一个白粉笔支持假设“不是黑的就不是乌鸦”，从而也支持“所有乌鸦是黑的”。但是按常识，白粉笔和“所有乌鸦是黑的”无关。

关于乌鸦悖论，西方[2-4]和国内[5-9]都有很多文章。大部分研究者像亨佩尔一样, 否定 **IR**，肯定 **EC**。但是 e_{00} 和 e_{11} 是同等地支持 h_1，还是支持程度不同，存在不同看法。流行的确证度公式很多[10-15]，但是这些公式并不能清楚告诉我们 e_{11} 和 e_{00} 对 h_1 的支持力度，两者支持力度相同还是不同。用这些确证度公式计算“所有乌鸦是黑的”和“HIV 测试呈阳性的人有艾滋病”的确证度，也非常勉强。

主要原因是 1）由单个证据不足以得到合理的确证度； 2）如波普尔所说，用条件逻辑概率表示确证度是不合适的，确证度既不是统计概率，也不是逻辑概率[16] 384，用逻辑概率或真值确证假设，那是演绎方法而不是归纳方法。笔者接受波普尔这一看法。周文华的文章[9]中有关于乌鸦悖论各种看法的总结。该文也认为 **EC** 不存在，但是本文得出令人意外结论：e_{00} 可能比 e_{11} 更好支持 h_1。

笔者得到新的确证度公式是研究语义信息和性选择时意外发现的。笔者利用统计数据和语义信息公式检验假设“身上有黄色羽毛的鸟喜欢吃花蜜或花粉”时发现：改变反例的真值可以提高平均语义信息。反例的真值是一个模糊假设中含有永真句的比例，可以理解为不信度，优化不信度就可以得到最优信任度，即确证度（或可信度）。

仙农信息论[17]诞生后，语义信息研究文章很多[18-21]。特别值得一提的是波普尔的研究。波普尔早在仙农之前就指出逻辑概率越小信息量越大[22] 96, 269。后来更明确强调用信息准则检验和证伪科学理论和假设[16] 294, 并提出自己的语义信息公式[16] 526。但是那些信息公式都不够实用，特别是不能反映信息来自预测，不能反映信息多少需要事实检验。笔者一直努力寻找同时兼容仙农和波普尔理论的语义信息公式[23-25]。和流行的度量语义信息和确证方法不同，笔者 1）严格区分统计概率（用 P 表示）和逻辑概率（用 T 表示）并同时使用两者；2）用客观的 P 检验和确证主观的 T， 即用样本概率分布（而不是单个证据）检验主观预测或其真值函数；3）确证度是样本概率分布和假设的真值函数的泛函，是用信息准则优化得到的，而不是人为定义的。

语义信息分析表明，和数理逻辑不同，归纳逻辑中，**IR** 和 **EC** 都是不成立的。把 h_1=“所有乌鸦是黑的”换成 h_1=“所有 HIV 检验呈阳性的人有艾滋病”（HIV 即艾滋病毒）， 我们就能看到 e_{00} 不但能支持 h_1, 而且在很多情况下，比 e_{11} 支持力度更大。这是出人意外的， 我们将证明这是确实的， 而且也和医学界共识兼容。

二、 模糊真值函数、逻辑概率、似然度和语义信息量

日常语言中，语句真假往往是模糊的。比如猜测“小偷大约 20 岁”，这话的真假是模糊的，在 0 和 1 之间变化。如果小偷真的 20 岁，猜测的真值就是 1; 如果有偏差，真值就变小。比如， 如果其年龄是 25 岁，真值大约是 0.8；如果是 40 岁，真值就接近 0。所以日常语言的真值函数取值于实数区间[0,1]而不是二值集合{0,1}。后面讲到的真值函数大多是模糊真值函数。日常语言的模糊化通常有两种，一种（如上面）用“大约”，“接近”表示真实情况有偏差，但是偏差不大； 另一种是用“很可能”、“或许”表示偏差较大也是可能的。比如“小偷很可能 20 岁左右”——不

排除说错可能（小偷 60 岁也是可能的）。“HIV 检验呈阳性的人很可能有艾滋病”和“很可能所有天鹅是白的”就是按后一种方式模糊化了的假设。本文主要考虑后一种模糊化——它涉及信任度。

Zadeh[26]使用模糊集合隶属度 $m_{Aj}(e_i)$描述命题 $h_j(e_i)$的真值。其中 e_i，是个体或证据；所有 e_i，i=1, 2… 构成一个均和或论域 A, A_j 是 A 的模糊子集。现在我们仿照 Zadeh，用模糊集合定义 $h_j(E)$的真值函数 $T(h_j|E)$。为了强调 $h_j(E)$= “$E\in A_j$”的语义，我也把 $T(h_j|E)$写作 $T(A_j|E)$，也就是定义

$$T(h_j \mid E) = T(A_j \mid E) = m_{A_j}(E) \qquad (1)$$

当 E=e_i 时，谓词 $h_j(E)$的真值函数就变为命题 $h_j(e_i)$的真值 $T(A_j|e_i)$。隶属函数或模糊真值函数是怎么来的？可以来自随机集合的统计[27]，也可以来习惯用法（参看式（18））。平均真值函数，我们就得到谓词 h_j (E)的逻辑概率:

$$T(A_j) = \sum_i P(e_i)T(A_j \mid e_i) \qquad (2)$$

它正是 Zadeh 定义的模糊集合的概率[28]. 注意，上面定义的逻辑概率是命题真值的平均值，它不等于数理逻辑中谓词的真值。谓词真值是后验的，而逻辑概率是先验的。

一个假设 h_j 有被选择的概率（统计概率）$P(h_j)$, 也有被判断为真的概率（逻辑概率）$T(A_j)$。当 h_j 被选择的时候，E 的条件概率是 $P(E|h_j)$，它就是样本（即证据）的概率分布。而当 h_j 为真的时候，E 的条件概率是

$$P(E \mid A_j) = \frac{P(E)T(A_j \mid E)}{T(A_j)} \qquad (3)$$

它是预测的概率, 即 Fisher 的似然度（函数）[29]。我们称上式为语义贝叶斯公式，它建立了统计概率 P 和逻辑概率 T 之间的关系。用最大似然估计的语言来说，A_j 或 $T(A_j|E)$是一个预测模型, $P(E|A_j)$是似然度(函数)。

根据经典信息理论，相对信息公式是：

$$I(e_i;h_j) = \log\frac{P(e_i \mid h_j)}{P(e_i)} \qquad (4)$$

这一公式是仙农互信息信息公式的核心。对 $I(e_i; h_j)$求平均，就得到仙农互信息 $I(E; H)$。 然而仙农并没用提出或使用过这个公式， 原因是用这个公式， 信息量可能是负的。而仙农熵公式和互信息公式度量的是平均信息， 从来都是正的。笔者认为，对于语义信息，负信息是可能的也是合理的，因为听信谎言和错误的预测，信息就是负的。仿照波普尔用信息准则证伪假设，负信息也是必要的。

在公式(4)中，用“h_j 是真的 ”取代“h_j,”，那么就得到

$$I(e_i;h_j) = \log\frac{P(e_i \mid h_j\text{是真的})}{P(e_i)}\log\frac{P(e_i \mid A_j)}{P(e_i)} \qquad (5)$$

根据公式(3)和(5), 我们可以得到语义信息公式:

$$I(e_i;h_j) = \log\frac{T(A_j \mid e_i)}{T(A_j)} \qquad (6)$$

这一公式体现了波普尔的思想：先验逻辑概率越小（分母越小）， 越是经得起检验（分子越大），信息量就越大；永真句信息是 0。根据这一公式，矛盾句信息也是 0，这样就避免了 Bar-hillel-Carnap 悖论[20]. 对 $I(e_i; h_j)$, i=1, 2, …, 求平均, 就得到假设 h_j 的平均语义信息：

$$I(E;h_j)=\sum_i P(e_i\mid h_j)\log\frac{P(e_i\mid A_j)}{P(e_i)}=\sum_i P(e_i\mid h_j)\log\frac{T(A_j\mid e_i)}{T(A_j)} \qquad (7)$$

该公式也可以说是广义 Kullback-Leibler 公式[30]，$I(E; h_j)$就是平均相对似然度[31] 214。其中 $P(e_i| h_j)$, i=1, 2, …是样本的条件概率分布，作为一组检验假设的证据。 可以证明，只要存在一个反例——$T(A_j|e_i)$是 0 而 $P(e_i| h_j)$不是 0，平均信息量就是负无穷大。所以，对于有可能存在反例的假设，把假设模糊化，使得反例的真值不是 0， 而是一个适当的值， 就可以提高平均语义信息。这个适当的值是什么呢？就是优化的不信度或否证度。

不难证明，当概率预测和样本概率分布符合时， 即 $P(E|A_j)= P(E|h_j)$（即 $P(e_i|A_j)= P(e_i|h_j)$， i=1, 2, …）时，平均语义信息量达最大[25]，等于相应的 Kullback-Leibler 信息[29]。根据贝叶斯公式和语义贝叶斯公式，就可以从 $P(E|A_j)= P(E|h_j)$得到最优真值函数 $T(A_j|E)=P(h_j)P(h_j|E)/T(A_j)$。令 $T(A_j|E)$的最大值是 1， 可以推导出

$$T(A_j|e_i)=P(h_j|\, e_j)/P(h_j|\, e_j^*)= P(e_i|h_j)/P(e_i)/[\, P(e_j^*|h_j)/P(e_j^*)],\ i=1, 2, \ldots \ (8)$$

其中 e_j^*是使 $P(h_j|E)$达最大的证据。注意，$P(h_j|E)$，j=1, 2, …构成仙农信道 $P(H|E)$，上面等式实质上就是说：当语义信道和仙农信道匹配时，语义信息量达最大， 最大值就是仙农互信息。

三、用平均语义信息公式优化不信度得到确证度

信任度是我们对一个假设的信任程度(degree of belief)，它是主观的或先验的。在假设被一系列证据确证后，我们得到优化的信任度，即确证度(degree of confirmation)或可信度。所以，确证度是归纳支持的程度。下面我们用 b 表示信任度，b^*表示确证度（或可信度），用 b'=1-|b| 表示不信度(degree of disbelief)，b'^*表示优化的不信度，即否证度(degree of disconfirmation)。

我们用下式定义一个谓词（而不是命题）的信任度 b（只合适 b>0）：

$$T(h_j^b|E)= T(A_j|E)= b' +bT(h_j|E) \qquad (9)$$

其中 h_j 是初始假设，假定它是非模糊的（也可以是模糊的）；b 是对 h_j 的信任度，h_j^b 是带有信任度 b 的 h_j, $T(h_j^b|E)$是 h_j^b 的真值函数, A_j 是使 h_j^b 为真的模糊集合。这个定义实际上是把不信度当做假设 h_j^b 中含有的永真句的比例。

对于初始假设 h_1，$T(h_1|e_{11})$=1，$T(h_1|e_{10})$=0。而对于模糊假设 h_1^b, 根据式（9），$T(A_1|e_{11})$=1，$T(A_1 |e_{10})$=b'。我们简记 P_1=$P(e_1)$，P_0=$P(e_0)$，Q_1=$P(e_1|h_1)$，Q_0=$P(e_0|h_1)$。根据式(2), 可得 $T(A_1)$=$b'P_0+P_1$。根据式(7), 可得

$$I(E;h_1^b)=Q_0\log\frac{b'}{b'P_0+P_1}+Q_1\log\frac{1}{b'P_0+P_1} \qquad (10)$$

根据上面公式，当 b=1 即 b'=0 时（这意味着听众完全相信 h_1） 如果有一个反例，信息就是负无穷大。当 b=0 即 b'=1， 这意味着听众完全不相信 h_1, 则平均信息是 0. 现在我们寻求使 $I(E; h_1^b)$达最大的 b' (0≤b' ≤1)。令导数 d $I(E; h_1^b)$/db'=0，我们得到 Q_0P_1-Q_1P_0b'=0。 解得

$$b'^{*}=(Q_0/Q_1)/(P_0/P_1) \qquad (11)$$

因为 $b'=b'^{*}$时二阶导数小于 0，所以上式中 b'^{*} 就是最优的 b'， 它使信息 $I(E; h_1{}^{b})$达最大。现在我们讨论式（11）且只考虑 $Q_0/Q_1< P_0/P_1$ 的情况。从式（9）也可以直接得到

$$b'^{*}=(Q_0/P_0)/(Q_1/P_1)=P(h_1|e_{10})/P(h_1|e_{11}) \qquad (12)$$

我们可以这样理解：否证度=反例的相对比例/正例的相对比例。现在可以得到确证度

$$b^{*}=1-(Q_0/Q_1)/(P_0/P_1)=1- P(h_1|e_{10})/P(h_1|e_{11}) \qquad (13)$$

这意味着 h_1 的确证度只和函数 $P(h_1|E)$（构成仙农信道）及真值函数 $T(h_1|E)$（构成语义信道）有关，而和信源 $P(E)$无关。我们可以这样理解：确证就是用仙农信道确证语义信道。

如果 $Q_0/Q_1>P_0/P_1$, 最优不信度 $b'^{*}=(P_0/P_1)/(Q_0/Q_1)$, 确证度就是负的: $b^{*}=b'^{*}-1$. 对于谎言（比如说“所有乌鸦是白的”）或过分肯定“所有天鹅是白的”（对于本来确信的人， 但是黑天鹅出现了），确证度就是负的。关于负的确证度，笔者已在别处讨论[①]。

四、解释乌鸦悖论

表 2 显示了 s_1 和 s_2 之间的推理一共有 4 种。它们是不同的，因为每种正例和反例不同。

表 2 四种推理以及它们的正例和反例

	$h_3=s_2\text{->}s_1$	$h_2=\neg s_2\text{->}\neg s_1$
$h_1= s_1\text{->}s_2$	正例 e_{11}	反例 e_{10}
$h_0=\neg s_1\text{->}\neg s_2$	反例 e_{01}	正例 e_{00}

我们用 n_{11} 表示 e_{11} 的个数，其他同理，表 3 显示了 $P(h_1|E)$和不同证据数量之间的关系。

表 3　关于乌鸦悖论的不信度 b_1'的优化

	黑的	不黑的(h_2)
乌鸦（h_1）	n_{11}	n_{10}
非乌鸦	n_{01}	n_{00}
$P(h_1\|E)$	$n_{11}/(n_{01}+ n_{11})$	$n_{10}/(n_{00}+ n_{10})$
$T(h_1{}^{b}\|E)$	1	$b_1'^{*}$

根据式（13）和表 3，可以得到 h_1 和 h_2 的否证度：

$$b_1'^{*}=\frac{n_{10}}{n_{00}+n_{10}}\Bigg/\frac{n_{11}}{n_{01}+n_{11}} \qquad (14)$$

$$b_2'^{*}=\frac{n_{10}}{n_{11}+n_{10}}\Bigg/\frac{n_{00}}{n_{01}+n_{00}} \qquad (15)$$

分别求 $b_1{}^{*}=1-b_1'^{*}$相对于 n_{11} 和 n_{00} 的偏导数得到:

$$\frac{\partial b_1^{*}}{\partial n_{11}}=\frac{n_{10}n_{01}}{(n_{00}+n_{10})n_{11}{}^{2}} \qquad (16)$$

① https://arxiv.org/abs/1609.07827

$$\frac{\partial b_1^*}{\partial n_{00}}=\frac{n_{10}(n_{01}+n_{11})}{n_{11}(n_{00}+n_{10})^2} \qquad (17)$$

设 $n=n_{11}+n_{00}+n_{10}+n_{01}$ 远大于 1，则式（16）和（17）就告诉我们两个证据 e_{11} 和 e_{00} 带来 b_1^*的增量。它们反映了在给定旧证据情况下新增证据对确证度的贡献。

为什么很多人认为不是白的也不是乌鸦的东西（比如白粉笔）和“所有乌鸦是黑的”不相关？首先，这是是因为我们从来没有见到不黑的乌鸦，这意味着 $n_{10}=0$ 且 $n_{11}>0$. 所以不管 n_{00} 有多大，$b_1^*=1$。 如果论域 A 只包含鸟，且 h_1=“大多数天鹅是白的”，那么一个证据 e_{00}（不是天鹅也不白的鸟）应该支持假设 h_1（使之通过了检验）。如果我们考虑快速 HIV 测试结果 h_1=+=“测试呈阳性的人很可能有艾滋病”，一个证据 e_{00}(检验呈阴性的非艾滋病患者)也应支持 h_1。.

第二，如许多学者指出，对于 h_1=“所有乌鸦是黑的”，e_{00}(不黑的也不是乌鸦)的数目极大，以致于一个证据 e_{00} 对 h_1 几乎不产生影响(即使有反例存在)。式（17）支持这种看法，因为当 n_{00} 远大于 n_{01} 的时候，$\partial b_1^* / \partial n_{00}$ 接近 0。不过，如周文华指出，e_{11} 也有这样的可能[9]。

可能几乎所有研究者都认为证据 e_{11} 能比 e_{00} 更好地支持 h_1。然而，根据式（16）和（17），我们可以得到不同结论。根据式（14），在 n_{00} 比 n_{10} 大很多且 $n_{11}=n_{01}$ 时，如果 n_{00} 加倍，$b_1'^*$差不多减少一半；然而，当 n_{11} 加倍时，$b_1'^*$只减少 1/4。所以， 在很多情况下，n_{00} 的增量比 n_{11} 的增量能更快减少对 h_1 的否证度。

下面我们再用医学检验说明 e_{00} 往往比 e_{11} 支持 h_1=“检验呈阳性的人有艾滋病”更有力。

五、医学检验检验的确证度

医学检验结果是+（阳性）或-（阴性），它们棵看做假设。比如，对于快速 HIV 检测，阳性者是否真的有艾滋病，还有待进一步确认。 现在 h_1=+， h_0=-。测试者也可以分为两类：艾滋病毒感染者 e_1 和非感染者 e_0。对于 e_1, +的条件概率是 $P(+|e_1)$，医学界称之为敏感性（sensitivity）；对于 e_0，-的条件概率是 $P(-|e_0)$，医学界称之为特异性（specificity）；如表 4 所示。

表 4 OREQuick HIV 检验①的 $P(+|E)$和 $P(-|E)$

	HIV (e_1)	non-HIV (e_0)
$P(+\|E)$	敏感性=0.917	1-特异性=0.001
$P(-\|E)$	1-敏感性=0.083	特异性=0.999

根据式（12）和表 4 可得优化的二元语义信道（见表 5）。

表 5 优化了的二元语义信道（以 HIV 检验为例）

	被感染个体 e_1	没感染个体 e_0
$T(h_1^{b1*}\|E)$	1	$b_1'^*$=(1-特异性)/敏感性=0.0011
$T(h_1^{b0*}\|E)$	$b_0'^*$=(1-敏感性)/特异性=0.083	1

$b_1'^*$就是阳性的不信度，$b_1=1-b_1'^*$就是阳性的可信度（或确证测度）。$b_0'^*$和 $b_0^*=1-b_0'^*$同理。

① http://www.oraquick.com/taking-the-test/understanding-your-results

根据式（13），$b_1{}'^{*}=P(+|e_0)/P(+|e_1)$=(1-特异性)/敏感性=(1-0.999)/0.917=0.0011。$b_1{}^{*}$=1-0.0011 =0.9989。根据式（10），$I(E;+^{b1*})$=5.52 比特(等于相应的 Kullback-Leibler 信息)。阴性-的否证度 $b_0{}'^{*}$=(1-敏感性)/特异性=0.083/0.999=0.083; $b_0{}^{*}$=1-0.083=0.917; $I(E;-^{b0*})$=0.04 比特。

容易发现，对于提高 h_1=+的确证度，特异性比敏感性更重要。比如，即使敏感性只有 0.1，只要特异性是 1，$b_1{}^{*}$就是 1，这意味着根据阳性+诊断感染 100%可信。如果特异性是 0.5，即使敏感性是 1， 根据+诊断艾滋病，可信度只有 0.5。类似地，我们可以证明敏感性对阴性-的确证度更加重要。当 n 足够大时，特异性= $n_{00}/(n_{00}+n_{10})$，敏感性=$n_{11}/(n_{11}+n_{01})$。显然 n_{00} 和特异性密切相关。这就是为什么在很多情况下 e_{00} 比 e_{11} 能更好地支持 h_1。要理解这一结果也不难。**因为敏感性大并不表示反例比例小，特异性大才表示反例比例小。一个假设要可信，较少的反例比较多的正例往往更重要！**

实际上，上面结论对医学界并不意外，医学研究者已经知道“敏感性是避免假阴性指标， 特异性是避免假阳性指标”[①]。医学界使用 Likelihood Ratio (LR)表示检验的可靠性：

$$\text{LR+} = \text{敏感性}/(1-\text{特异性}) = 1/b_1{}'^{*} \qquad (18)$$

$$\text{LR-} = \text{特异性}/(1-\text{敏感性}) = 1/b_0{}'^{*} \qquad (19)$$

显然有，$b_1{}^{*}$=1-1/LR+ ，$b_0{}^{*}$=1-1/LR-. 这就是说，$b_1{}^{*}$ 和 LR+正相关, $b_0{}^{*}$和 LR-正相关。可见本文结论和医学界共识兼容。不同的是 $b_1{}^{*}$的上限是 1，适合作为确证度。如果有人搞错了，说“HIV+表示没感染 HIV”（$\neg h_1$）， 那么 $b_1{}^{*}$将在 0 和-1 之间。 所以， 如果错误的检验报告是可能的，$b_1{}^{*}$将在-1 和 1 之间。

另外，$b_1{}'^{*}$ 可以用来预测被感染的概率。根据语义贝叶斯公式（3）和式（9），给定 $P(e_1)$ 和 $b_1{}'^{*}$，可以得到

$$P(e_1 \mid h_1^{b_1*}) = \frac{P(e_1)}{P(e_1)+b_1{}'^{*}(1-P(e_1))} \qquad (20)$$

如果有 HIV 病毒的人的先验概率 $P(e_1)$大约是 0.002（在加拿大）[②]， 那么根据式（20），$P(e_1|h_1^{b*})$=0.002/(0.002+0.0011*0.998)=0.65。这并不足够高。如果先验概率 $P(e_1)$是 0.0001, 则后验概率 $P(e_1|+)$只有 0.08。这些结果和使用贝叶斯公式结果相同。因为后验概率不够高，所以关于医学检验的可靠性，在统计学家和医生之间存在争论[③]。实际上，$b_1{}^{*}$=0.9989 和先验概率 $P(e_1)$是不相关的, 要根据+预测被测试者有 HIV 的可能性（百分比），我们还需要根据受试者属于哪个群体选择适当的先验概率。假设对于男同性恋高危人群，$P(e_1)$ 增大到 0.1，$P(e_0)$=0.9。根据语义贝叶斯公式（3），可以得到 $P(e_1|h_1^{b*})$=0.1/(0.1+0.0011*0.9)=0.991。

流行的确证测度大多使用逻辑概率，没有用到敏感性和特异性， 所以很难应用于医学检验。$s(H, E)$[12]= $Pr(h_1|e_1)-Pr(h_1|e_0)$看起来最接近 b^*——如果我们假定其中 Pr 是统计概率而不是逻辑概

① https://en.wikipedia.org/wiki/Sensitivity_and_specificity
② http://www.catie.ca/en/fact-sheets/epidemiology/epidemiology-hiv-canada
③ http://www.bbc.com/news/magazine-28166019

率。但是这样还是不能保证反例个数 n_{10} 是 0 的时候，确证度是 1。比如敏感性是 0.1 而特异性是 1 时，没有反例，根据阳性预测有病 100%正确，但是 $s(H, E)$=0.1-0=0.1，太小，这是不合理的。

六、总结

平均语义信息公式是本文用来确证的主要工具， 它和仙农信息论、波普尔理论及似然度方法兼容。新的确证方法在本质上是用客观的仙农信道确证主观的语义信道。其合理性可以通过如何乌鸦悖论和医学检验看出。上述语义信息测度也可以用于证伪[23]。关于证伪和确证的基本结论是：1）证伪（包括假设的检验，选择和优化）用语义信息准则。这意味着，一个假设越正确，精度越高，先验越是意外，经确证后越是可信，则它提供的信息就越多，就越是可以接受； 2）确证就是通过反例和正例的相对比例优化假设的信任度得到确证度，从而提高平均语义信息，因此是证伪的辅助手段。

参考文献

[1]Carl G. Hempel, Studies in the Logic of Confirmation[J]. *Mind*, 1945, 54:1–26 and 97–121.

[2]Irving John Good, The Paradox of Confirmation[J]. *The British Journal for the Philosophy of Science* , 1960, 11:145-149.

[3]Peter Maher, Inductive Logic and the Ravens Paradox[J]. *Philosophy of Science*, 1999,66:50–70.

[4]Branden Fitelson, James Hawthorne, How Bayesian Confirmation Theory Handles the Paradox of the Ravens[A], Eells and Fetzer (eds.) *The Place of Probability in Science*[C]. Open Court, 2010, 247-275.

[5]陈晓平. 归纳逻辑与归纳悖论[M]，武汉：武汉大学出版社， 1994.

[6]朱志方. 亨普尔的归纳悖论[J].华中科技大学学报（社科版），2010，24（2），35-39.

[7]顿新国. 归纳悖论研究[M]，北京：人民出版社，2012.

[8]任晓明、陈晓平. 决策、博弈与认知——归纳落实的理论与应用[M]. 北京：北京师范大学出版集团，2014.

[9]周文华. ‘一个新的解决乌鸦悖论的方案’[J], 自然辩证法通讯，2015(5): 26-32.

[10]Rudolf Carnap, *The Continuum of Inductive Methods*[M]. Chicago: University of Chicago Press, 1952.

[11]John Earman, *Bayes or Bust? A Critical Examination of Bayesian Confirmation Theory*[M]. Cambridge, MA: MIT Press. 1992.

[12]David Christensen, Measuring Confirmation[J]. *The Journal of Philosophy*, 1999, 96:437–461.

[13]Peter Milne, log[P(h/eb)/P(h/b)] Is the One True Measure of Confirmation[J]. *Philosophy of Science,* 1996, 63:21-26.

[14]Branden Fitelson, The Plurality of Bayesian Measures of Confirmation and the Problem of Measure Sensitivity[J]. *Philosophy of Science*,1999. 66:S362–378.

[15]Katya Tentori, Vincenzo Crupi, Nicolao Bonini, and Daniel Osherson, Comparison of Confirmation Measures[J]. Cognition 2007, 103:107-119

[16] Karl Popper, *Conjectures and Refutations*[M]. Reprinted(2005). London and New York: Routledge. 1963.

[17]Claude E. Shannon, A mathematical theory of communication[J]. *Bell System Technical Journal*, 1948, 27:379–429, 623–656.

[18] Yehoshua Bar-Hillel, Rudolf Carnap, An Outline of a Theory of Semantic Information[C]. *Tech. Rep*. No.247, Research Lab. of Electronics, MIT. 1952.

[19]Geoge J. Klir, *Uncertainty and Information: Foundations of Generalized Information Theory*[M]. Hoboken: John Wiley,2005.

[20]Luciano Floridi, Outline of a theory of strongly semantic information[J]. *Minds and Machines* 2004,14:197-221.

[21]Simon D'Alfonso, On Quantifying Semantic Information[J]. *Information,* 2011，2:61-101.

[22]Karl Popper, *Logik Der Forschung: Zur Erkenntnistheorie Der Modernen Naturwissenschaft* [M]. Wien: J. Springer, 1935; English translation: The Logic of Scientific Discovery, London: Hutchinson.1959.

[23]鲁晨光.广义信息论[M], 合肥,中国科学技术大学出版社，1993.

[24]鲁晨光, 广义熵和广义互信息的编码意义[J]，通信学报，1994，15(6):37-44.

[25]LU Chenguang (鲁晨光). A generalization of Shannon's information theory[J] Int. J. of General Systems, 28 (6) 1999, 453-490.

[26]Zadeh, L.A. Fuzzy Sets[J]. *Information and Control* 1965, 8:338–353.

[27]Wang, P. Z., Sanchez, E. 'Treating a Fuzzy Subset as a Projectable Random Set'[A], Gupta,M. M., Sanchez, E.(eds) *Fuzzy Information and Decision*. Oxford:Pergmon Press: 1992, 212-219.

[28]Lotif A Zadeh, Probability Measures of Fuzzy Events[J]. *J. of Mathematical, Analysis and Applications*, 1986, 23:421-427.

[29] John Aldrich, R. A. Fisher and the Making of Maximum Likelihood 1912–1922[J]. *Statistical Science,*1997,12:162–176.

[30] Solomon Kullback, Richard Leibler, On information and Sufficiency[J]. *Annals of Mathematical Statistics*,1951, 22:79–86.

[31][美]Thomas M. Cover, Joy A. Thomas, 信息论基础[M]，阮吉寿，张华译，机械工业出版社，2007.

Confirmation Method Based on Semantic Information Theory ——With Raven Paradox and Medical Test as Examples

LU Chenguang

(Department of Mathematics and Computer, Changsha University, Changsha 410022)

Abstract: To modern inductive logic, it is central issue how to calculate the degree of confirmation. The study on sematic information shows that using appropriate degree of believe, we may increase Average Semantic Information (ASI). To calculate the ASI conveyed by a series of evidences supporting a hypothesis, we may change the degree of disbelief, i.e, the true-value of counterexamples, *b*' to increase the ASI. The *b*' that maximizes the ASI is the degree of disconfirmation, denoted by *b*'*; *b**=1-*b*'* is the degree of confirmation. For a universal hypothesis, *b**=1-(ratio of counterexample decreasing)/(ratio of positive example increasing), which indicate that the less counterexamples are more important than more positive examples to confirm hypotheses. According mathematical logic**,** “All ravens are black” is equal to “All non-back things are not ravens”； a piece of evidence, such as a white chalk, that supports the later also supports the former. This is against common knowledge and hence there is a Paradox. Consider medical tests, both the equivalence and the common knowledge above are wrong. The medical community uses Positive Likelihood Ratio (LR+) to express the reliability of test-positive, where LR+=sensibility/(1-specificity). Fortunately the b^*=1- (1-specificity)/sensibility=1-1/LR+, and thus is compatible with common view of medical community.

Key words: inductive logic; confirmation; raven paradox; medical test; semantic information