人类第一次打开素数大门（Ⅱ）

蒋春暄

摘要：本文用 Jiang 函数 $J_2(\omega)$ 证明了素数分布中所有可以表示为素数的素数线性方程式，包括孪生素数定理和哥德巴赫定理，我们用 Jiang 函数 $J_n(\omega)$ 建立一门完整素数分布理论，从而打开素数大门。

本文为中学生和大学生介绍数学中两个最伟大的问题孪生素数定理和哥德巴赫定理的证明。这是国内外顶尖数论专家一筹莫展的问题。我相信只要他们仔细看，一定能明白。从而他们能理解素数分布中所有问题，这是划时代的成果，将来大学生都要学习这种理论，素数分布是一个仓库、贮藏有用之不竭的能引起人们兴趣的真理，这是数论研究中一个伟大飞跃。详细参看[1-5]。

一、素数定理

设 $\pi(N)$ 为小于或等于 N 的素数的个数，在估计 $\pi(N)$ 这个数，它与概率有关，Gauss 首先猜测它的概率为 $1/\log N$，我们得出

$$\pi(N)=\left|\{P\le N\}\right|\sim C\frac{N}{\log N} \tag{1}$$

后来人们证明常数 C=1，我们得出素数定理

$$\pi(N)=\left|\{P\le N\}\right|\sim \frac{N}{\log N} \tag{2}$$

（2）详细研究可以参考有关书，在这里我们只提一下。主要目的，我们用概率观点研究素数分布中定理，但我们研究中没有用概率观点，完全是用解析方法，参看书[4]。因为用概率方法比较简单也比较直观，一般人也容易接受。所以下面我们用概率方法推导公式，我们最重要工具是 Jiang 函数 $J_2(\omega)$。我们用 Jiang 函数 $J_n(\omega)$ 建立一门完整素数分布理论。从而打开素数大门。

二、$P_2=aP_1+b$ 和哥德巴赫定理

定理 1 $P_2=aP_1+b$，$(a,b)=1, 2\,|\,ab$，有无限多素数 P_1 使得 P_2 是素数。

证明 P_1 和 P_2 同时是素数，它的概率为 $1/(\log N)^2$，P_1 个数公式为

$$\pi_2(N,2)=\left|\{aP_1+b, P_1\le N\}\right|\sim C\frac{N}{\log^2 N} \tag{3}$$

$$C=\frac{J_2(\omega)\omega}{\phi^2(\omega)}=\text{常数} \tag{4}$$

其中 $$\omega=\prod_{2\le P}P,\quad \phi(\omega)=\prod_{2\le P}(P-1), \tag{5}$$

ω 称为素数阶乘（primorial），$\phi(\omega)$ 称为 Euler 函数，

$$J_2(\omega)=\prod_{3\le P}(P-1-X(P)), \tag{6}$$

$J_2(\omega)$ 称为 Jiang 函数[5]，$X(P)$ 是同余式

$$aq+b\equiv 0(\bmod P),\quad q=1,2,\cdots,P-1 \tag{7}$$

解的个数。如 $P\,\big|\,ab$，那么 $X(P)=0$，其它情况 $X(P)=1$。

我们有 Jiang 函数

$$J_2(\omega)=\prod_{3\le P}(P-2)\prod_{P|ab}\frac{P-1}{P-2}\ne 0 \tag{8}$$

因为 $J_2(\omega)\ne 0$，我们证明有无限多素数 P_1 使得 P_2 是素数。

把（4），（5）和（8）代入（3）我们有

$$\pi_2(N,2)=\left|\{aP_1+b,\,P_1\le N\}\right|\sim 2\prod_{3\le P}\left(1-\frac{1}{(P-1)^2}\right)\prod_{P|ab}\frac{P-1}{P-2}\frac{N}{\log^2 N}, \tag{9}$$

例 1 哥德巴赫定理 设 $a=-1$ 和 $b=N$，我们 $N=P_1+P_2$，即（1+1）

从（8）我们有 Jiang 函数

$$J_2(\omega)=\prod_{3\le P}(P-2)\prod_{P|N}\frac{P-1}{P-2}\ne 0 \tag{10}$$

因为 $J_2(\omega)\ne 0$，我们证明了每个大于 4 的偶数是两个数素之和，中学生和大学生都能理解和证明它。从（9）我们有

$$\pi_2(N,2)=\left|\{N-P_1,\,P_1<N\}\right|\sim 2\prod_{3\le P}\left(1-\frac{1}{(P-1)^2}\right)\prod_{P|N}\frac{P-1}{P-2}\frac{N}{\log^2 N}\quad, \tag{11}$$

（11）是 1923 年 Hardy 和 Littlewood 猜想公式，都认为这公式是正确的，没有人无条件的推导出公式（11）。

例 2 孪生素数定理 设 a=1 和 b=2，我们有 $P_2=P_1+2$

从（8）我们有 Jiang 函数

$$J_2(\omega)=\prod_{3\le P}(P-2)\ne 0. \tag{12}$$

因为 $J_2(\omega)\ne 0$，我们证明了有无限多个素数 P_1 使得 P_2 也是素数。中学生和大学生都能理

解和证明它。从（9）我们有

$$\pi_2(N,2)=\left|\{P_1+2,P_1\le N\}\right|\sim 2\prod_{3\le P}\left(1-\frac{1}{(P-1)^2}\right)\frac{N}{\log^2 N}\sim 1.32032\frac{N}{\log^2 N}. \qquad (13)$$

例 1 和例 2 是当代最伟大数学的问题，也是本文中最简单的数学问题。（11）和（13）人们用数字计算证明它们是正确的，只能是一种猜测，没有从理论上把它们推导出来，我们推导出所有公式都是正确的。

三、$P_2=a_1P_1+b_1$ 和 $P_3=a_2P_1+b_2$

定理 2　$P_2=a_1P_1+b_1$，$(a_1,b_1)=1,2\left|a_1b_1\right.$；$P_3=a_2P_1+b_2$，$(a_2,b_2)=1,2\left|a_2b_2\right.$。

它有两种情况：（1）最多只有一个素数 P_1 使得 P_2 和 P_3 都是素数，或无素数 P_1 使得 P_1 和 P_2 都是素数。（2）有无限多个素数 P_1 使得 P_2 和 P_3 都是素数。

证明　P_1，P_2 和 P_3 同时都是素数，它的概率为 $1/(\log N)^3$，P_1 个数公式为

$$\pi_3(N,2)=\left|\{a_1P_1+b_1,a_2P_1+b_2,P_1\le N\}\right|\sim C\frac{N}{\log^3 N}, \qquad (14)$$

$$C=\frac{J_2(\omega)\omega^2}{\phi^3(\omega)}=常数,$$

（15）

$$J_2(\omega)=\prod_{3\le P}(P-1-X(P)), \qquad (16)$$

$X(P)$ 是同余式

$$(a_1q+b_1)(a_2q+b_2)\equiv 0(\bmod P),\quad q=1,2,\cdots,P-1, \qquad (17)$$

解的个数。

如 $X(P)=P-1$，那么 $J_2(P)=0$，$J_2(\omega)=0$，最多只有一个素数 P_1 使得 P_2 和 P_3 都是素数，或无素数 P_1 使得 P_1 和 P_2 都是素数。如 $X(P)<P-1$，$J_2(\omega)\ne 0$，那么有无限多素数 P_1 使得 P_2 和 P_3 都是素数。

例 3　$P_2=P_1+2$ 和 $P_3=P_1+4$，从（17）我们有 $X(3)=2, J_2(3)=0$，只有一个素数 $P_1=3$，使得 $P_2=5$ 和 $P_3=7$ 都是素数。

例 4　$P_2=P_1+2$ 和 $P_3=P_1+22$，从（17）我们有 $X(3)=2$，$J_2(3)=0$，无素数 P_1 使得 P_2 和 P_3 都是素数。

例 5　$P_2=P_1+2$ 和 $P_3=P_1+6$，从（16）和（17）我们有 Jiang 函数

$$J_2(\omega)=\prod_{5\le P}(P-3)\ne 0 \qquad (18)$$

因此有无限多素数 P_1 使得 P_2 和 P_3 都是素数。

例 6 $P_2 = P_1 + 6$ 和 $P_3 = P_1 + 12$，从（16）和（17）我们有 Jiang 函数

$$J_2(\omega) = 2\prod_{5\le P}(P-3) \ne 0 \tag{19}$$

因此有无限多素数 P_1 使得 P_2 和 P_3 都是素数。

例 7 $P_2 = N - P_1$ 和 $P_3 = P_1 + 6$，从（16）和（17）我们有 Jiang 函数

$$J_2(\omega) = \prod_{3|N}(P-1)\prod_{5\le P}(P-3)\prod_{\substack{P|N \\ P|(N+6) \\ P>3}}\frac{P-2}{P-3} \ne 0 \tag{20}$$

因此，我们证明了对每个大于 6 的偶数有素数 P_1 使得 P_2 和 P_3 都是素数，$P_2 = N - P_1$ 就是哥德巴赫猜想。

四、$P_{i+1} = a_i P_1 + b_i$ 和素数表理论

定理 3 $P_{i+1} = a_i P_1 + b_i,\ i = 1,2,\cdots,n \quad (a_i, b_i) = 1,\ 2|a_i b_i$ 它们有两种情况：(1) 最多只有一个素数 P_1 使得 P_2，P_3，…，P_{n+1} 都是素数，或无素数 P_1 使得 P_2，…，P_{n+1} 都是素数。(2) 有无限多素数 P_1 使得 P_2，…，P_{n+1} 都是素数。

证明 P_1，P_2，…，P_{n+1} 同时都是素数，它们的概率为 $1/(\log N)^{n+1}$，P_1 个数公式为

$$\pi_{n+1}(N,2) = \left|\{a_i P_1 + b_i,\ P_1 \le N\}\right| \sim C\frac{N}{\log^{n+1} N} \tag{21}$$

$$C = \frac{J_2(\omega)\omega^n}{\phi^{n+1}(\omega)} = \text{常数} \tag{22}$$

$$J_2(\omega) = \prod_{3\le P}(P - 1 - X(P)) \tag{23}$$

$X(P)$ 是同余式

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i q + b_i) \equiv 0 (\bmod P),\ q = 1,2,\cdots,P-1, \tag{24}$$

解的个数，如 $X(P) = P-1$，那么 $J_2(P) = 0$，最多只有一个素数 P_1 使得 P_2，…，P_{n+1} 都是素数，或无素数 P_1 使得 P_2，…，P_{n+1} 都是素数。如 $X(P) < P-1$，$J_2(\omega) \ne 0$，那么有无限多素数 P_1 使得 P_2，…，P_{n+1} 都是素数。

例 8. $P_2 = P_1 + 2$，$P_3 = P_1 + 6$，$P_4 = P_1 + 8$，从（20）和（21）我们有

$$J_2(\omega) = \prod_{7\le P}(P-4) \ne 0 \tag{25}$$

因此有无限多个素数 P_1 使得 P_2， P_3 和 P_4 都是素数，从（21）我们有

$$\pi_4(N,2) = \left|\{P_1+2, P_1+6, P_1+8, P_1 \le N\}\right| \sim \frac{1}{8}\left(\frac{15}{4}\right)^3 \prod_{7\le P} \frac{P^3(P-4)}{(P-1)^4} \frac{N}{\log^4 N} \qquad (26)$$

例 9. $P_2 = P_1 + 2$， $P_3 = P_1 + 6$， $P_4 = P_1 + 8$， $P_5 = P_1 + 12$， $P_6 = P_1 + 14$，从（24）我们有 $X(5) = 4$，$J_2(5) = 0$，那么只有一个素数 $P_1 = 5$ 使得 $P_2 = 7$，$P_3 = 11$，$P_4 = 13$，$P_5 = 17$ 和 $P_6 = 19$。

证明 $P_{i+1} = a_i P_1 + b_i$ 最后转变为研究同余式（24），这是一个非常简单同余式方程，中学生和大学生都能够证明世界上最伟大的数学问题：哥德巴赫猜想和孪生素数猜想。利用定理 3，我们可以证明文献[1]中定理 1 至定理 36。以后我们研究 $P_2 = aP_1^2 + bP_1 + c$，$P_2 = aP_1^3 + bP_1^2 + cP_1 + d$ 和 $P_{n+1} = f(P_1, P_2, \cdots, P_n)$ 素数解。这样我们在全中国通过网络进行一次新素数理论大普及活动。

五、附录

Euler 函数 $\phi(\omega)$ 和 Jiang 函数 $J_2(\omega)$ 有以下性质

1. $\phi(\omega) = \prod_{3\le P}(P-1)$ $\qquad J_2(\omega) = \prod_{3\le P}(P-1-X(P))$；

2. $\phi(1) = \phi(2) = 1$ $\qquad J_2(1) = J_2(2) = 1$；

3. $\phi(2^n) = 2^{n-1}$ $\qquad J_2(2^n) = 2^{n-1}$；

4. $\phi(\omega^m) = \omega^{m-1}\phi(\omega)$ $\qquad J_2(\omega^m) = \omega^{m-1}J_2(\omega)$；

$$C = \frac{J_2(\omega^m)\omega^m}{\phi^2(\omega^m)} = \frac{J_2(\omega)\omega}{\phi^2(\omega)}, \qquad C = \frac{J_2(\omega^m)(\omega^m)^2}{\phi^3(\omega^m)} = \frac{J_2(\omega)\omega^2}{\phi^3(\omega)}$$

$J_2(\omega)$ 和 $\phi(\omega)$ 有相同性质， $J_2(\omega)$ 是 $\phi(\omega)$ 一个推广。$J_2(\omega) \le \phi(\omega)$。下面我们以孪生素数 $P+2$ 为例，研究 ω， $J_2(\omega)$ 和 $\phi(\omega)$ 之间的关系。设 ω=30，$\phi(30) = 8$，即 $(30, e_i) = 1$，$e_1 = 1, e_2 = 7, e_3 = 11, e_4 = 13$， $e_5 = 17, e_6 = 19$， $e_7 = 23, e_8 = 29$，它们构成 8 个方程式，$P_1 = 30n+1$，$P_2 = 30n+7$，$P_3 = 30n+11$，$P_4 = 30n+13$，$P_5 = 30n+17$，$P_6 = 30n+19$，$P_7 = 30n+23$， $P_8 = 30n+29$， $n = 0,1,2,\cdots$。P_1 至 P_8 可以形成大于 5 所有素数。孪生素数 Jiang 函数 $J_2(30) = 3$，即 $(30, e_i + 2) = 1$，我们有 $e_3 = 11, e_5 = 17$ 和 $e_8 = 29$，我们有三个孪生素数方程式， $P_3 = 30n+11$， $P_5 = 30n+17$， $P_8 = 30n+29$， $n = 0,1,2,\cdots$。这三个方程式包括所有孪生素数的解。设 $\omega = 210, (210, e_i) = 1$ 我们有 $\phi(210) = 48, (210, e_i + 2) = 1$ 我们有 $J_2(210) = 15$。如 ω 越大，$\phi(\omega)$ 和 $J_2(\omega)$ 也越大，孪生素数常数 C=1.32032，（13）解个数越精确。

参考文献

1. 蒋春暄，人类第一次打开素数大门，2006-9-6，上岗，本文非常通俗地解释新的素数理论。
2. 蒋春暄，On the prime number theorem in additive prime number theory，论余新河—哥德巴赫素数定理，首届全国《余新河数学题》研讨会议论文，1995 年 10 月 28-30 日，福建师大。本文所有结果都是根据上面两文而写成的。我们发现已有 11 年了。中国数学界仍不承认，那有什么办法？只有通过网络介绍蒋春暄的工作，数学爱好者可以写文章和书：美国素数理论也只是第二流和第三流水平，没有什么新东西，但他们可以获世界数学大奖，水份太多。
3. 蒋春暄，论余新河—哥德巴赫素数定理，广西科学，1996，3（1），9-12。
4. 蒋春暄，Foundations of Santilli's isonumber theory with application to new cryptograms, Fermat's theorem and Goldbach's conjecture. Inter. Acad. Press, 2002, MR2004c: 11001, www, i-b-r. org； www. Chinabokee. cn/bbs. P24 定理 3.3 研究 $J_n(\omega)$ 函数性质。P25-28，$\pi_2(N,2)$ 公式的推导。P28-47 用大量例子说明 $J_2(\omega)$ 的性质。P170-211 是素数表理论。P221 定理 6.24 是 $\pi_k(N,2)$ 公式推导。P339-357 用 14 种方法证明了哥德巴赫猜想。

5. 蒋春暄，Disproofs of Riemann's hypothesis. Algbras, Groups and Geometries 2005, 22, 123-135, www. I-b-r.org。在本文中 Santilli 教授正式把 $J_n(\omega)$ 命名为 Jiang 函数，，他的旨出：“我相信这简直是历史性的贡献，对中国提供了巨大的荣誉”。但方舟子和宋富高指出这篇文章是完全错的，在网上大肆地攻击蒋春暄，在 1859 年黎曼定义他的 zeta 函数为

$$\zeta(s)=\prod_{p}(1-P^{-s})^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} \qquad (27)$$

其中 $s=\sigma+t_i$， $i=r-1$， σ 和 t 为实数， $t\neq 0$， p 包括所有素数，（27）是一个恒等式，$\zeta(s)$ 是一个复变函数，在很多书中错误指出，$\mathrm{Re}(s)>1$，zeta 收敛，$\mathrm{Re}(s)<1$ 它发散，这是完全错误的，方舟子和宋富高抓这一点攻击蒋春暄，$\zeta(s)$ 是一个收敛复变函数，用于数字计算采用 $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$，进行理论研究采用 $\zeta(s)=\prod_{P}(1-P^{-s})^{-1}$。在 1896 年 J. Hadamard 和 de la Vallee Poussin 独立证明 $\zeta(1+it)\neq 0$ 就是利用这个公式，蒋春暄利用这公式否定黎曼假设是完全正确的，最近还有无名人氏攻击蒋春暄，总之方舟子和宋富高认为蒋春暄所有结果都是错的。